Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale, du Préscolaire et des Sports
Centre National de l'Évaluation et des Examens

Examen National du Brevet de Technicien Supérieur
Session de Mai 2023
- Sujet -

Filières :	**Développement des Systèmes d'Information / Systèmes et Réseaux Informatiques / Multimédia et Conception Web**	**Durée :**	**2 heures**
Épreuve :	**Mathématiques**	**Coefficient :**	**15**

N.B : Seules les calculatrices non programmables sont autorisées

3 points **Exercice 1 :**

1. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

0,75 a. $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n^2+1}$ (On pourra utiliser le critère de D'Alembert) .

0,75 b. $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2\sqrt{e^n}+1}{3\sqrt{e^n}+2} \right)^n$ (On pourra utiliser le critère de Cauchy) .

0,75 2. a. Montrer que la fonction : $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ est décroissante sur l'intervalle $[2\ ,\ +\infty[$.

0,75 b. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

7 points **Exercice 2 :**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E):\ y'' - 6y' + 5y = -4e^x .$$

où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1 1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H) : $y'' - 6y' + 5y = 0$.

1 2. Vérifier que la fonction g définie par : $g(x) = xe^x$ est une solution particulière de (E).

1 3. Déduire la solution générale de l'équation (E).

4. Soient f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1,5 a- En utilisant une intégration par parties , calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.

1 b- Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

1,5 c- En déduire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point $A(0,2)$ et préciser sa position relative par rapport à (C_f) .

6 points **Exercice 3 :**

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par : $f(x,y)=(5x-3y,6x-4y)$.
et $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. (On rappelle que $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$) .

0,5 — 1. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 6 & -4\end{pmatrix}$.

1 — 2. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$, puis déduire les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A où $\lambda_1 < \lambda_2$.

3. Soit $\mathscr{B}'=(u_1,u_2)$ où $u_1=(1,2)$ et $u_2=(1,1)$.

0,5 — a. Etablir que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

1 — b. Vérifier que u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 .

1 — 4. Donner la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et vérifier que $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

1 — 5. Déterminer la matrice diagonale D vérifiant $A=PDP^{-1}$.

1 — 6. Calculer A^n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4 points **Exercice 4 :**

Le tableau suivant présente l'évolution du budget publicitaire et du chiffre d'affaire d'une société au cours des 5 dernières années :

Budget publicitaire en millions de dirhams: x_i	10	12	14	16	18
Chiffre d'affaire en millions de dirhams: y_i	52,5	57,5	70	77,5	92,5

1 — 1. Déterminer le point moyen G de cette série statistique .

1 — 2. a- Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.

0,5 — b - Peut-on envisager une relation linéaire entre les deux variables x et y ?

1 — 3. Montrer que l'équation de la droite de régression linéaire de y en x est : y = 5 x

0,5 — 4. Estimer le budget publicitaire lorsque la société aura un chiffre d'affaire de 200 millions de dirhams .

Fin de l'épreuve